Title and abstract

Mini-course:

Charles Collot
Around the description of wave turbulence via the kinetic wave equation

Course 1: Introduction to wave turbulence.

We will first review the main physical issues of wave turbulence: understanding the Fourier spectrum, and the mass and energy transfers, of certain small solutions of nonlinear wave equations (following Zakharov, L'vov and Falkovich, and Nazarenko). Then, we will discuss how for the example of the cubic nonlinear Schrodinger equation, the kinetic wave equation arises in certain regimes to describe the evolution of the Fourier spectrum. The main result of this first course will be the formal derivation of this kinetic wave equation. For that, we will introduce the basic concepts of weak nonlinearities, resonances, and of randomness, and the basic tool of Feynman interaction diagram.

Course 2: Around the kinetic wave equation.

We will start by reviewing recent results on the derivation of the kinetic wave equation, that make rigorous the formal derivation of Course 1 (Buckmaster-Germain-Hani-Shatah, C.-Germain and Ampatzoglou, and Deng-Hani who obtained the full justification). Then, we will discuss some basic properties of the kinetic wave equation, for the model example that is the 3D isotropic case (following Escobedo, Velazquez, and co-authors). The main result of this second course will be the proof that the Kolmogorov-Zakharov spectrum for an inverse mass cascade is a well defined steady state of the equation. We will end by mentioning some stability results (Escobedo-Mischler-Velazquez, C.-Dietert-Germain).

Talks :

Anxo Biasi
Weakly nonlinear dynamics of spatially confined waves.

This talk will provide a view, in the interphase between physics and mathematics, of weakly nonlinear waves subject to confining mechanisms: a compact domain, a trapping potential, etc. These scenarios are significantly different from unbounded systems. They lack the main mechanism of asymptotic stabilization in absence of confinement, the so-called "dissipation by dispersion", enabling the display of rich phenomena. We will present some of these phenomena in this talk: turbulent cascades, periodic precession of vortices, Fermi-Pasta-Ulam recurrences, stochasticity, etc.

Louise Gassot
Problème de Cauchy en basse régularité pour des équations de type Schrödinger

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Nicolas Camps. On s'intéresse à l'équation de Schrödinger en régime sur-critique, pour lequel le problème de Cauchy est mal posé. Le caractère mal posé se manifeste par une croissance des normes en temps arbitrairement court. On montre que ce phénomène persiste lorsque l'on restreint la régularisation de la donnée initiale à la régularisation par convolution. Puis on comparera ces résultats à l'étude du caractère localement bien posé pour la même équation avec des données initiales aléatoires. Enfin, dans un travail avec Rémi Carles, on expliquera comment adapter cette stratégie à la perte de régularité du flot.

Ricardo Grande
Étude statistique de la formation des vagues extrêmes

Nous nous intéresserons à la formation de vagues de hautes amplitude, dit vagues extrêmes, en haute mer en adoptant un point de vue probabiliste. Nous identifierons en premier lieu le premier terme du développement asymptotique de la probabilité d'occurrence d'une telle vague lorsque la hauteur de la vague tend vers l'infini. Si une vagues extrême survient, quelle est la donnée initiale la plus probable qui l'a produite ? Nous répondons à cette question dans le régime faiblement non linéaire en donnant une caractérisation probabiliste de l'ensemble des vagues extrêmes aussi bien dans le cadre de l'équation NLS que dans le cadre des équations Water-Waves.

Antoine Mouzard
Scattering, random phase and wave turbulence

Abstract : The theory of wave turbulence aims at a description of the nonlinear interaction of a large number of waves. In this talk, I will present a new family of initial data for the cubic two-dimensional nonlinear Schrödinger equation on the real plane, motivated by the link between regularity of the resonant manifold and dispersive properties of the equation and scattering phenomena. These initial data are periodic functions embedded in the whole space by Gaussian truncation and we are able to describe the time evolution in various time scales for deterministic and random initial data, in the limit of a large number of periods and small initial data. This allows explicit computations and we identify two different regimes where the time evolution converges towards the kinetic operator but with different forms of convergence, coming from resonances or quasiresonances.